Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ est une suite de K.

I. Généralités sur les séries numériques

[EA] Déf. 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite de K. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$. La série de terme général u_n, notée $\sum_n u_n$ ou $\sum u_n$ est la
79 suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S_n est appelée somme partielle d'ordre n.

Déf. 2 : Si $\sum u_n$ converge, sa limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est
80 appelée somme de la série.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste d'ordre n par $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$.

Ex. 3 : Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$ et $u_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $\sum u_n$ converge SSI $|q|<1$ et on a alors $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$

Prop. 4 : L'ensemble des séries convergentes à valeurs dans K est
82 un K-ev.

Rq 5 : Faux pour les séries divergentes

Prop/Déf. 6 : Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Si $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Rq : Prop 6 n'est pas une condition suffisante.
Si $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ pour $n \geq 1$, $u_n \xrightarrow[n]{} 0$ mais $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Prop 7 : $(u_n)_n$ et $\sum u_{n+1} - u_n$ sont de même nature (série télescopique)

83 Ex. 8 : $n \geq 1$ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Th. 9 : (critère de Cauchy)
K étant complet, $\sum u_n$ converge SSI
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \forall q > p \geq n, \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \varepsilon$$

Ex. 10 : $n \geq 1$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ donc la série harmonique 84
$\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Déf. 11 : $\sum u_n$ est dite absolument convergente (A.C.) si
$\sum |u_n|$ converge.

Prop. 12 : Une série A.C. est convergente. ♡

Rq 13 : La réciproque est fausse (voir $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ au III).

Déf. 14 : Si $\sum u_n$ converge mais n'est pas A.C., on dit qu'elle 85
est semi-convergente.

II. Séries à termes positifs [EA]

Cadre 15 : Dans cette partie, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de $\mathbb{R}^+$

Lemme 16 : $\sum u_n$ converge SSI $(S_n)_n$ est majorée. Si $\sum u_n$ 85
diverge, alors $S_n \xrightarrow[n]{} +\infty$, et on écrira $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Th. 17 : On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors
1) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge, et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ 86
2) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge.

Ex. 18 : $\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Th. 19 : On suppose que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même
nature. De plus, 87
1) si les séries convergent, alors les restes sont équivalents
2) ——— divergent, ——— sommes partielles sont équivalentes.

Th. 20 : On suppose que $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$). Alors
1) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ (resp. $o(\dots)$) 90
2) Si $\sum v_n$ diverge, $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ (resp. $o(\dots)$)

Th. (21) : (comparaison série-intégrale)

91 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante.
Alors $\sum_{n \geq a} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence on a : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

88 **Th. (22) : (séries de Riemann)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge SSI $\alpha > 1$.

On a alors $R_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

[FGN1] 156 **Appli. (23)** : Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$.

DVP1 1) M.q. : $\exists \gamma > 0 \,/\, H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) Pour $n \geq 1$, on pose $k_n = \min\{k \geq 1 \,/\, H_k \geq n\}$. M.q. $\frac{k_{n+1}}{k_n} \longrightarrow e$

Prop. (24) : On suppose que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont > 0 à partir d'un certain
93 rang p, et que : $\forall n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors : si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge
si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Exo (25) : OSP que $(u_n)_n$ est > 0 et que $u_n = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

117 Mq : 1) si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge
2) si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Rq (26) : ⚠ Les théorèmes de II ne sont vrais que pour les séries
♡ à termes ≥ 0. On verra que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge (faire un développement limité).

III, Séries de terme général quelconque [LEI A

1) Convergence absolue : règles de Cauchy et de D'Alembert

Th. (27) : (règle de Cauchy)

Soit $L = \limsup_n |u_n|^{1/n}$. Alors : 94

1) si $L < 1$, $\sum u_n$ est A.C.
2) si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exo (28) : M.q. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge

Rq (29) : Si $L < 1$, alors il existe $0 < \alpha < 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n| \leq \alpha^n$ 107
pour $n \geq n_0$. On a alors pour $n \geq n_0$, $|R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

Th. (30) : (règle de D'Alembert)

On suppose $(u_n)_n$ non nulle à partir d'un certain rang.
Soit $L = \limsup_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et $l = \liminf_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Alors : 95

1) si $L < 1$, $\sum u_n$ est A.C.
2) si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ex. (31) : Soit $a > 0$ et $u_n = \frac{a^n}{n}$ $(n > 0)$. Alors $\sum u_n$ converge si $a < 1$, diverge sinon.

Rq (32) : Si $L < 1$, alors il existe $0 < \alpha < 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$ 108
pour $n \geq n_0$. On a alors $|R_n| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |u_n|$ $n \geq n_0$.

Ex. (33) : $u_n = \frac{1}{n!}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{11}$ pour $n \geq 10$

donc $R_{10} \leq \frac{\frac{1}{11}}{1 - \frac{1}{11}} \times \frac{1}{10!} = \frac{1}{10! \times 10} < 3 \times 10^{-8}$

S_{10} est une valeur approchée de e à 3.10^{-8} près. 109

Prop. (34) : Si $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors $\left(|u_n|^{1/n}\right)$ admet 95
la même limite.

Csq (35) : Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n]{} 1$, il est inutile de tenter d'appliquer la 96
règle de Cauchy...

[ELA] **2) Séries semi-convergentes**

Déf. 36 : On appelle série alternée toute série de terme général
97 $(-1)^n a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite réelle de signe constant.

Th. 37 : (*critère des séries alternées (CSA)*)
Soit $(a_n)_n$ une suite ≥ 0, décroissante et tendant vers 0. Alors, $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 38 : $\forall \alpha > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge et $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Rq 39 : $(a_n)_n \geq 0$ et $a_n \xrightarrow[n]{} 0$ ne suffit pas (voir Rq 26)

Th. 40 : (*critère d'Abel*)
~ Soient $(a_n)_n$ une suite > 0, décroissante et tendant vers 0, et $(b_n)_n$
99 une suite de $\mathbb{K}$ telle que : $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ où $M > 0$.
Alors, $\sum a_n b_n$ converge, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq 2M a_{n+1}$.

Ex. 41 : $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

III. Utilisation des séries de fonctions

1) Séries entières

On supposera connues les notions de série entière, rayon de convergence,
[ELA] cercle d'incertitude ...

Rq 42 : On ne sait a priori rien du comportement d'une série entière et de sa somme sur le cercle d'incertitude :
231 1) $\sum (-1)^n z^n$ est de rayon 1 et diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0,1)$
2) $\sum \frac{z^n}{n}$ est de rayon 1 et converge sur $\mathcal{C}(0,1) \setminus \{1\}$
3) $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge normalement sur $\overline{D}(0,1)$

Th. 43 : (*Abel angulaire*) (voir ANNEXE) [Gou]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ telle que 263
$\sum a_n$ converge. On note f la somme sur $D(0,1)$ sur $\sum a_n z^n$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$
et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \,/\, z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors, $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Appli. 44 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Rq 45 : Réciproque fausse : $\frac{1}{1+z} \xrightarrow[z \to 1]{} \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge 264

Th. 46 : (*Taubérien faible*)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme f sur $D(0,1)$. On suppose que : $\exists S \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x < 1}]{} S$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors, $\sum a_n$ converge vers S.

2) Séries de Fourier (S.F.)

Notations 47 : $\mathbb{T}$ désigne $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (Tore), $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $c_n(f)$ (resp. $S_n(f)$) désignent les coefficients de Fourier de f (resp. sommes partielles de la SF de f, somme de la SF de f) pour $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Th. 48 : (*Dirichlet*)
Si $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, alors : $\forall x \in [0, 2\pi]$, $S_n(f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

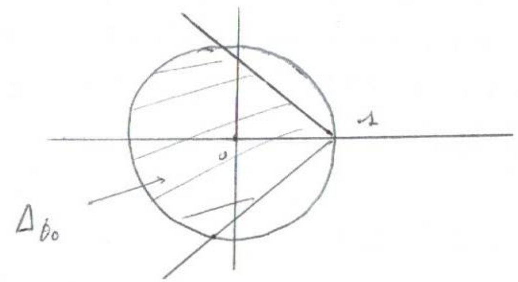
Prop. 49 : (*Parseval*)
Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Appli. 50 : Soit f 2π-p. telle que $f_1|_{[-\pi,\pi]}(t) = |t|$ et $f_2|_{[-\pi,\pi]}(t) = -1_{[-\pi,0]}(t) + 1_{[0,\pi]}(t)$
Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

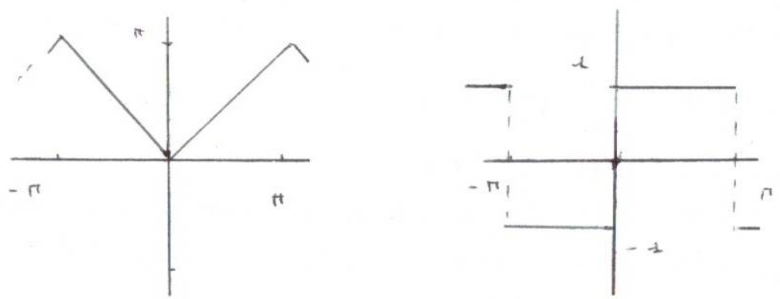
(Dirichlet pour f_1, Parseval pour f_2). (voir ANNEXE)

ANNEXE

Th. 43 :



Appli. 50 :



Références :

- [ElA] El Amrani, Suites et séries...
- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [FGN1] Francinou, Oraux X-ENS Analyse 1